FUNTZIOEN LIMITEAK. (Ariketa osagarriak 1)

1. **Indeterminazioak identifikatu eta kalkulatu hurrengo limiteak:**

1.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

2.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)$

3.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3.2^x}{2^x+1}$ (Zatiketa egin)

4.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\log x}{\log x}$ (Zatiketa egin)

5.- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

6.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ (Konjugatua erabili)

7.- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

8.- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^6+1}\cdot\dfrac{2}{x^2}$

9.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x^3+x}\cdot\dfrac{6x+2}{8}\right)$

10.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6+3x}{3x-8}\right)^{2x^2}$

11.- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)^{-4x}$

12.- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{2x^2-6x}$

13.- $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

14.- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}\right)$

15.- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

16.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

17.- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x+3}\right)^{\frac{2}{x-2}}$

Emaitzak

1.- $\Rightarrow$ **0**

2.- $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x^2+3}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2+3}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$

3.- $\Rightarrow$ **3**	**4.-** $\Rightarrow \infty$	**5.-** $\Rightarrow$ **4**	**6.-** $\Rightarrow$ **-2**
7.- $\Rightarrow$ **0**	**8.-** $\Rightarrow \infty$	**9.-** $\Rightarrow$ **0**	**10.-** $\Rightarrow e^{\infty}$
11.- $\Rightarrow e^{8}$	**12.-** $\Rightarrow$ **-1/6**	**13.-** $\Rightarrow e^{6}$	**14.-** $\Rightarrow \sqrt{8}$
15.- $\Rightarrow$ **2**	**16.-** $\Rightarrow \infty$	**17.-** $\Rightarrow e^{12/5}$	

2. Kalkulatu ondorengo limiteak

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$ $\to$-2

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{sen^2x}$ $\to$-1/2

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}(senx)^{tagx}$ $\to$1

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$ $\to$1/2

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$ $\to$-2

i) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ $\to\frac{1}{2\sqrt{a}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[arctg(e^x)-\frac{\pi}{2}\right]$ $\to$0

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-senx}{tgx-senx}$ $\to$1/3

l) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$ $\to$1

m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+3senx)^{\frac{2}{x}}$ $\to$6

n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(senx)}{\cos^2x}$ $\to$-1/2

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{\sqrt{1-x}-1}$ $\to$2

p) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln x$ $\to$1

q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ $\to$1/2

r) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ $\to$1/2

s) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-senx}{sen^2x}$ $\to$0

t) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{senx}}{1-\cos x}$ $\to$0

u) $\lim\limits_{x\to 0}(1+sen3x)^{\cot x}$ $\to e^{2/3}$

v) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$ $\to$0

w) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$ $\to$1

x) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{sen^2x}}$ $\to e^{-½}$

y) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}$ $\to$2

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e$ $\to$a?

ARIKETA OSAGARRIAK - FITXA

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = 0$ Izendatzaileak orden goreneko ∞ daukalako

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{3}{0}\right) - \left(\dfrac{1}{0}\right)$ IND

$(\pm\infty) - (\pm\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2+3) - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^3} = \left(\dfrac{3}{0}\right)$

Albo limiteak

$-0{,}001 \rightarrow 0 \leftarrow 0{,}001$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x+1} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \dfrac{3}{1} = 3$

Zenbakitzailean eta izendatzailean maila berekoak direnez $\rightarrow$ koefizienteen arteko zatiketa

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\log x}{\log x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = +\infty$

Berreketa limitea infinitoa, logaritmoa baino orden goreneko delako

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}(x^2+1)}{\cancel{(x-1)}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} (x+1)(x^2+1) = \underline{4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$ Konjugatuarekin biderkatu eta zatitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{x+1})}{\cancel{1}-(\cancel{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(1+\sqrt{x+1})}{-\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} (-1-\sqrt{x+1}) = \underline{\underline{-2}}$$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = (+\infty) - (+\infty)$ IND.

Aldatu $-\infty \to +\infty$ eta $x \to -x$ eta konjugatuarekin biderkatu eta zatitu

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \cdot (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (\sqrt{x^2-1})^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-(\cancel{x^2}-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^6+1} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ IND. $= +\infty$

Zenbakitzaileak x^3 eta izendatzaileak x^2 dauez zenbakitzailearen ∞-aren ordena altuagoa da.

9.) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x^3+x} \cdot \dfrac{6x+2}{8} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = 0$ Izendatzaile maila > zenbakit.

10.) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{6+3x}{3x-8}\right)^{2x^2} = (1^{+\infty})$ Formula erabili $e^{\lim (f(x)-1)\cdot g(x)}$

$$e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x+6-3x+8}{3x-8}\cdot 2x^2} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{14 \cdot 2x^2}{3x-8}}_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \infty}} = e^{\infty} = \underline{+\infty}$$

11.) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2-1}\right)^{-4x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x^2-1}\right)^{4x} = (1^{\infty})$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2-1/2x}\right)^{4x \cdot \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{2x}{x^2-1}} =$

$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{4x \cdot 2x}{x^2-1}} = \underline{\underline{e^{8}}}$

Formula ere apliko daiteke

12.) $\lim_{x \to 3} \frac{3-x}{2x^2-6x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ Faktorizatu

$= \lim_{x \to 3} \frac{\overset{-1}{\cancel{3-x}}}{2x\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{-1}{2x} = \underline{\underline{\frac{-1}{6}}}$

13.) $\lim_{x \to 0} (1+3x)^{2/x} = (1^{\infty})$ Formula erabili.

$e^{\lim_{x \to 0} (\cancel{1}+3x-\cancel{1}) \cdot \frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{6x}{x}} = \underline{\underline{e^{6}}}$

14.) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2-4} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{(x+2)\cancel{(x-2)} \cdot x}{\cancel{x-2}}} = \lim_{x \to 2} \sqrt{x \cdot (x+2)} = \underline{\underline{\sqrt{8}}}$

15.) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}} = \underline{\underline{2}}$

16.) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \underline{\underline{+\infty}}$

maila berak infinituok

17.) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{2x^2-x-1}{x-3}\right)^{2/x-2} =$

2.) a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right) = (\pm\infty)-(\pm\infty)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} =$$

$$= \frac{-0}{2-0} = \underline{\underline{0}}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{IND} = \underline{\underline{0}}$ Exponentzialen limiteak ordena goragokoak dira berreketak baino.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = (+\infty)-(+\infty)$ IND

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Zenbak. eta izendatzailea infinituak maila berekoak direnez, koefizienteen arteko zatiketa.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ IND

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin(2x))\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}(2x)}{x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2(2x)}\cdot 2}{1} = \underline{\underline{-2}}$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2\sin x\cdot\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2(\cos^2 x-\sin^2 x)} = \frac{-1}{2}$$

saile

f) $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{(\sin x)^{tg\,x}}_{A} = (0^0)$ IND.

$A = (\sin x)^{tg\,x}$

$\ln A = \ln (\sin x)^{tg\,x} = tg\,x \cdot \ln(\sin x)$

$\lim_{x\to 0^+} tg\,x \cdot \ln(\underbrace{\sin x}_{0^+}) = (0 \cdot +\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{1/tg\,x}$

$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to o} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{tg^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} =$

$$\lim_{x\to o} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to o} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} =$$

$$\lim_{x\to o} \frac{-\cos x\cdot \sin^2 x}{\sin x} = \lim_{x\to o} -\cos x \cdot \sin x = 0$$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \frac{1-\cos 0}{(e^0-1)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ IND.

$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2(e^x-1)\,e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2(2e^x - e^x)} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ IND.

$\lim_{x\to 0} \frac{2x e^{x^2}}{-\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^{x^2} + 2x\cdot e^{x^2}}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$

i) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

j) $\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\operatorname{arctg}(\underbrace{e^x}_{\infty})-\frac{\pi}{2}\right] = \infty\cdot 0.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^x-\pi/2}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot e^x}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2\cdot e^x}{1+e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2x\cdot e^x+(-x^2)\cdot e^x}{2\cdot e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\cancel{e^x}(+2x+x^2)}{2\cdot \cancel{e^x}\cdot e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-(x^2+2x)}{2e^x} = 0$$

Izendatzailearen ∞ gorakoko ordena infinitua da.

k) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x}{1-\cos^3 x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{\underset{x\to 0}{=}} \frac{\sin x\cdot\cos^2 x+2\cos x\cdot(-\sin x)(1-\cos x)}{-3\cos^2 x\cdot(-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin x\cdot\cos x}\,(\cos x - 2(1-\cos x))}{3\,\cancel{\sin x\cos x}\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-2+2\cos x}{3\cos x} = \frac{1}{3}$$

e) $\lim_{x\to 0}(e^x-x)^{1/x} = (1^\infty)$ Formulaz: $e^{\lim_{x\to 0}(f(x)-1)g(x)}$

$$e^{\lim_{x\to 0}(e^x-x-1)\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x-x-1)\frac{1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{1} = 0$$

m) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + 3\sin x)^{2/x} = (\cancel{\cos 0}_{1} + 3\cancel{\sin 0}_{0})^{2/0} =$

$= (1^{\infty})$ Forme lepot.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x + 3\sin x - 1)\,2}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\underline{\underline{H}}\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(-\sin x + 3\cos x)}{1} = \underline{\underline{6}}$

n) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ IND.

$= \lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x}{2\cos x\cdot(-\sin x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x/\sin x}{-2\sin x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{(-\sin^2 x - \cos^2 x)\frac{1}{\sin^2 x}}{\underbrace{-2\cos^2 x + 2\sin^2 x}_{1}} = \boxed{\dfrac{-1}{2}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}} = \dfrac{1}{-1/2} = \underline{\underline{-2.}}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\cdot \ln x = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \underline{\underline{1}}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{0}\right) - \left(\dfrac{1}{0}\right)$ IND.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{1}{1+x}}{1\cdot\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \overset{H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+\ln(1+x)} = \frac{1}{2}$$

r.) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{0}-\frac{1}{0}$ IND.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{(e^x-1)+x\cdot e^x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

s/ $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin(2x)}} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos(2x)} = \frac{0}{2} = 0$$

t/ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos x} = \frac{e^0-e^0}{1-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x\, e^{\sin x}}{\sin x} = \frac{e^0-\cos 0\cdot e^{\sin 0}}{\sin 0} = \frac{1-1\cdot e^0}{0} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+\sin x\, e^{\sin x} - \cos^2 x\, e^{\sin x}}{\cos x} = \frac{1+\cancel{\sin 0\cdot e^0}-1\cdot e^0}{1} = \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

u/ $\lim_{x\to 0} (1+\sin 3x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} (1+\sin 3x)^{1/\operatorname{tg} x} = 1^{\infty}$ Formule

$$e^{\lim_{x\to 0} (1+\sin 3x-1)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}} = e^3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{1/\cos^2 x} = 3$$

v/ $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1/\cos^2 x} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}.$

w/ $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - x)^{1/x} = (1^\infty)$ Formulepot:

$e^{\lim\limits_{x\to 0} (e^x-x-1)\frac{1}{x}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$\lim\limits_{x\to 0} (e^x - x - 1)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1-0-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}.$

x/ $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x} = (1^\infty)$ Formulepot

$e^{\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 1)\frac{1}{\sin^2 x}} = \boxed{e^{-1/2}}$

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 1)\cdot\frac{1}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cancel{\sin x}}{2\cancel{\sin x}\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos x} = -1/2$

y/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \underline{\underline{2}}.$

z/ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{ax\cdot\frac{3}{3}} =$

$= \underline{\underline{e^{3a}}}$